INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

CONCOURS EXTERNE D'ELEVE ATTACHE et

CONCOURS D'ENTREE A L'ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE

ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

(Division des cadres de gestion statistique)

JUIN 1988 OPTION A DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

N.B : 1 - Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$.

2 - n étant un entier positif ou nul, (E_n) désigne l'équation différentielle :

$$(E_n)\quad xy'' - 2ny' + xy = 0$$

On entend par solution de (E_n) une application y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ entier, vérifiant (E_n).

1 - Si ψ_n est une solution de (E_n) telle que $\psi_n(0) = 0$, montrer que l'application ψ_{n+1} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\psi_{n+1}(x) = \int_0^x t\,\psi_n(t)\,dt$$

est une solution de (E_{n+1}) telle que $\psi_{n+1}(0) = 0$.

La suite ψ_n étant construite par récurrence, montrer que, pour $n \geq 2$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi_n(x) = (2n-1)\,\psi_{n-1}(x) - x^2\,\psi_{n-2}(x)$$

2 - On pose $A_0(x) = \sin x$. A_0 est visiblement solution de (E_0). A l'aide de la relation de récurrence :

$$A_{n+1}(x) = \int_0^x t\,A_n(t)\,dt,$$

on définit, grâce à la question 1, une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout n entier naturel, A_n soit solution de (E_n) et $A_n(0)=0$.

a) Etudier la parité de A_n.

b) Expliciter $A_1(x)$ et $A_2(x)$. Etudier les variations de A_1 sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

c) Montrer que : $(\forall n \geq 1),\ (\forall x \in]0, \frac{5\pi}{4}]),\ A_n(x) > 0$

d) Montrer que, pour tout n entier naturel, A_n est développable en série entière de rayon de convergence infini. Ecrire ce développement en série entière.

e) Pour x donné, montrer l'existence de $\lim_{n \to +\infty} A_n(x)$ et calculer cette limite.

On pourra se ramener au cas où $x \geq 0$, écrire $A_n(x)$ sous la forme $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p\,\alpha_{n,p}(x)$ et montrer l'existence d'un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Longrightarrow 0 \leq A_n(x) \leq \alpha_{n,0}(x)$.

3 - a) $\mathbb{R}(X)$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}(X)$ tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ P(x)\cos x + Q(x)\sin x = 0$$

Montrer que P et Q sont nuls.

b) Pour tout n entier naturel, montrer l'existence de deux polynômes U_n et V_n de $\mathbb{R}(X)$ tels que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}),\ A_n(x) = U_n(x)\sin x - V_n(x)\cos x$$

Etudier la parité de U_n et de V_n. Déduire de la question 1 des relations de récurrence sur les A_n, sur les U_n, et sur les V_n.

c) On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n(x) = U_n(x)\cos x + V_n(x)\sin x$$

Déduire de 3 -b) la parité de B_n et une relation de récurrence sur B_n.

Montrer que : $B'_{n+1}(x) = x\,B_n(x)$

et que B_n est solution de (E_n).

d) Déterminer les termes de plus haut degré de U_n et de V_n. Il sera utile de traiter séparément les deux cas $n = 2k$, $n = 2k+1$, où k est un entier.

4 - Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, déterminer l'ensemble des solutions de (E_n).

5 - a) Expliciter B_0, B_1, B_2. Etudier les variations de B_1 et B_2 sur $[0, \frac{3\pi}{2}]$. En déduire que B_1 admet un zéro unique, noté α, sur $[0, \frac{3\pi}{2}]$. On remarquera que α est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, et on en déduira l'étude des variations de B_2.

Tournez la page S. V. P.

b) Montrer que : $(\forall n \geqslant 2),\ (\forall x \in [0, \frac{5\pi}{4}]),\ B_n(x) > 0,$

$(\forall n \geqslant 3),\ (\forall x \in [0, \frac{5\pi}{4}]),\ B_n(x) \geqslant U_n(0),$

$(\forall n \in \mathbb{N}),\ (\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]),\ U_n(x) > 0,$

$(\forall n \geqslant 2),\ (\forall x \in [\pi, \frac{5\pi}{4}]),\ U_n(x) < 0,$

$(\forall n \geqslant 1),\ (\forall x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]),\ V_n(x) > 0.$

On aura à utiliser des expressions de U_n et V_n en fonction de A_n et B_n.

c) Montrer que :

$(\forall n \geqslant 1),\ (\forall x \in \mathbb{R}),\ V_n(x)\, U_{n-1}(x) - U_n(x)\, V_{n-1}(x) = x^{2n-1},$

et que : $(\forall n \geqslant 1),\ (\forall x \in]0,\pi]),\ V_n(x) > 0.$

d) Montrer que, pour $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donné, la suite $W_n(x) = \dfrac{V_n(x)}{U_n(x)}$ est monotone et qu'elle admet tg x pour limite.

6 - a) Montrer que, pour $n \geqslant 2$, U_n admet un zéro sur $]0,+\infty[$ et que, si l'on désigne par x_n le plus petit zéro de U_n sur $]0,+\infty[$, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante ; étudier sa convergence et déterminer sa limite.

b) Expliciter V_3, V_4, V_5.

Calculer $\dfrac{V_n(\sqrt{10})}{\sqrt{10}}$ pour les entiers n tels que $0 \leqslant n \leqslant 5$ (on trouvera des entiers relatifs très simples). Vérifier que, pour $n \geqslant 5$, on a $V_n(\sqrt{10}) < V_{n-1}(\sqrt{10})$.

Montrer enfin que, pour $n \geqslant 3$, V_n admet au moins un zéro sur $]0,+\infty[$.

c) On désigne par y_n le plus petit zéro de V_n sur $]0,+\infty[$: étudier le sens de variation de la suite $(y_n)_{n\geqslant 3}$; étudier la convergence de cette suite et déterminer sa limite.

7 - Soit, pour $n \geqslant 1$, une suite de réels (a_n) tous non nuls.

On définit deux suites de polynômes $f_n(a_1,a_2,\ldots,a_n,x)$ et $g_n(a_2,a_3,\ldots,a_n,x)$ par les égalités : $f_0(x) = 1,\quad f_1(a_1,x) = a_1,$

$(\forall n \geqslant 2),\ f_n(a_1,\ldots,a_n,x) = a_n\, f_{n-1}(a_1,\ldots,a_{n-1},x) - x^2 f_{n-2}(a_1,\ldots,a_{n-2},x),$

et, de même : $g_0(x) = 0,$

$g_1(x) = x,$

$(\forall n \geqslant 2),\ g_n(a_2,\ldots,a_n,x) = a_n\, g_{n-1}(a_2,\ldots,a_{n-1},x) - x^2 g_{n-2}(a_2,\ldots,a_{n-2},x).$

a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les égalités :

$$f_{n+1}(a_1,a_2,\ldots,a_{n+1},x) = a_{n+1}\, f_n(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n - \frac{x^2}{a_{n+1}},x),$$

$$g_{n+1}(a_2,a_3,\ldots,a_{n+1},x) = a_{n+1}\, g_n(a_2,a_3,\ldots,a_{n-1},a_n - \frac{x^2}{a_{n+1}},x).$$

Montrer par ailleurs que :

$$g_{n+1}(a_2,a_3,\ldots,a_{n+1},x) = x\, f_n(a_2,a_3,\ldots,a_{n+1},x)$$

b) On suppose dans cette question, et jusqu'à la fin du problème, x choisi de façon qu'aucun dénominateur ne soit nul. On pose :

$$\frac{g_n(a_2,a_3,\ldots,a_n,x)}{f_n(a_1,a_2,\ldots,a_n,x)} = T_n(a_1,a_2,\ldots,a_n,x).$$

Montrer que :

$$T_1(a_1,x) = \frac{x}{a_1}\ ;\ T_2(a_1,a_2,x) = \frac{x}{a_1 - \dfrac{x^2}{a_2}}\ ;\ T_3(a_1,a_2,a_3,x) = \frac{x}{a_1 - \dfrac{x^2}{a_2 - \dfrac{x^2}{a_3}}}$$

En déduire une expression de $T_n(a_1,a_2,\ldots,a_n,x)$ que l'on justifiera.

c) On prend ici et jusqu'à la fin :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*),\ a_n = 2n-1.$$

Quelle expression en déduit-on pour $W_n(x)$ défini en 5 - d) ? (Lorsque $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, le résultat trouvé est connu sous le nom de développement de tg x en fraction continue algébrique).

d) Calculer, en précisant le matériel utilisé, une valeur décimale approchée de $W_8(1)$ et comparer avec celle de tg 1 .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail